Universidad Simón Bolívar
Departamento de Matemáticas
Puras y Aplicadas

Matemáticas III (MA-1116)
3^{er} Examen Parcial (40 %)
Sep-Dic 2010

JUSTIFIQUE TODAS SUS RESPUESTAS

1. (10 pts.) Dada la función $T : M_{2\times 2} \to M_{2\times 2}$, definida por,

$$T(A) = A + BA, \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Demuestre que T es transformación lineal.
   (b) Encuentre la matriz asociada a T con respecto a las bases canónicas.
   (c) Halle nulidad y rango de T.

2. (10 pts.) Dada la matriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ -1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$.
   (a) Halle los autovalores y espacios propios de B.
   (b) Diga, justificando su respuesta, si la matriz B es diagonalizable.
   (c) En caso de ser diagonalizable, determine una matriz diagonal D y una matriz invertible C tal que $D = C^{-1}BC$

3. (10 pts.) Sea H un subespacio definido por $H = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : 3x - 2y + 6z = 0 \right\}$
   (a) Halle $H^{\perp}$.
   (b) Halle una base ortonormal para H.
   (c) Dado el vector $\vec{v} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$, halle $\text{proy}_H \vec{v}$.

4. (10 pts.) Considere la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & -3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.
   (a) Encuentre una base para la imagen y una base para el espacio nulo de la matriz A.
   (b) Calcule la nulidad y el rango de A.